Matemáticas I: Álgebra Lineal
Control I. 10-11-2016

Las respuestas sin justificación se considerarán como no contestadas.
Este control constituye el 60 por ciento de la calificación de la asignatura.
Duración del examen: 1 hora y 45 minutos

---

(1) **Ejercicio (15 puntos)** Determina $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ base de $\mathbb{R}^3$ en que $e_1 = (1,1,0)_B$, $e_2 = (0,-1,1)_B$ y $e_3 = (1,1,1)_B$, donde e_1, e_2, e_3 son los vectores de la base canónica.

(2) **Ejercicio (20 puntos)** Considera la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) (5 puntos) Estudia la dimensión del núcleo y de la imagen de una transformación lineal cuya matriz es M.
(b) (10 puntos) Calcula M^{34}.
(c) (5 puntos) Estudia el comportamiento asintótico de $(\frac{1}{3}M)^n$.

(3) **Ejercicio (25 puntos)** Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ que cumple lo siguiente:

- Su núcleo viene definido por las ecuaciones

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

- Su imagen es el complemento ortogonal del núcleo de f.
- $v = (1,1,1,1)$ es un autovector con autovalor asociado 2.

(a) (10 puntos) Construye la matriz en la base canónica de una f que cumpla las propiedades arriba señaladas.
(b) (5 puntos) Determina si f es única. Si la respuesta es afirmativa explica por qué, si es negativa construye otra posible f.
(c) (5 puntos) Determina si puedes imponer adicionalmente que $f(1,1,1,1) = 0$ y que f tenga más autovectores.
(d) (5 puntos) Construye $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ de modo que la dimensión de la imagen de $g \circ f$ sea uno.

Mat I

Control 1: Álgebra lineal

(10-11-2016)

(1) La información que nos dan es M_{CB} y nos piden su inversa.

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para calcular la inversa, usamos Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \to F_2 - F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_3 \to F_3 + F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 \to F_1 - F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Finalmente $F_2 \to -F_2 \Rightarrow M_{BC} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Así $B = \{ v_1 = (2,1,-1),\ v_2 = (-1,-1,1),\ v_3 = (-1,0,1) \}$

2 (a) Come $Rg\, M = 3 \Rightarrow$ $\ker f = \{0\}$ $\dim = 0$
$\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^3$ $\dim = 3$

(b) Diagonalizziamo.

$$\det \begin{pmatrix} 2-x & 1 & 1 \\ 3 & 2-x & 3 \\ -3 & -1 & -2-x \end{pmatrix} = -x^3+2x^2+x-2$$

Autovalori $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = -1$; $\lambda_3 = 2$

$\underline{\lambda_1 = 1}$ $\mathrm{Aut}(1) = \ker(f - Id) = \langle (1,0,-1) \rangle$

$\underline{\lambda_2 = -1}$ $\mathrm{Aut}(-1) = \ker(f + Id) = \langle (0,1,-1) \rangle$

$\underline{\lambda_3 = 2}$ $\mathrm{Aut}(2) = \ker(f - 2Id) = \langle (1,1,-1) \rangle$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Allora $$M^{34} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{34} \end{pmatrix} P^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{34} & 2^{34}-1 & 2^{34}-1 \\ 2^{34}-1 & 2^{34} & 2^{34}-1 \\ -2^{34}+1 & -2^{34}+1 & -2^{34}+2 \end{pmatrix}$$

(c) $\left(\frac{1}{3}\Pi\right)^n = \Pi^n/3^n = P \begin{pmatrix} 2^n/3^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n/3^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n/3^n \end{pmatrix} P^{-1} \to$ ③

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

③ $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$

Base del núcleo: $\begin{cases} (1,0,0,-1) = v_1 \\ (0,1,-1,0) = v_2 \end{cases}$

Base de la Imagen: $(1,0,0,1) = v_3$
$(1,1,1,1) = v_4$

Información recibida: $f(v_1) = f(v_2) = 0$
$f(v_4) = 2v_4$

y tenemos libertad para elegir $f(v_3)$

siempre que esté en Im f. Por ej. $f(v_3) = v_3$

y además $\langle v_3, v_4 \rangle = \text{Im}\, f$.

$$M(f)_{BC} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$M(f)_{CC} = M(f)_{BC} \, M_{CB}$$

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

(b) Podemos elegir $f(v_3) = 2v_3$. Así no es única.

(c) Como $(1,1,1,1) \notin \ker f$, ~~su condición no se puede~~ ~~hacer~~.

La elección que hicimos de $f(v_3) = v_3$ garantiza que sí.

(d)
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^4 \\ & \searrow^{g \circ f} & \downarrow S \\ & & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

$\dim \operatorname{Im} f = 2$

$\downarrow$

entonces

$\ker(S \circ f)$
$v_1 \to f(v_1) = 0 \to (S \circ f)(v_1) = 0$
$v_2 \to f(v_2) = 0 \to (S \circ f)(v_2) = 0$
$v_3 \to f(v_3) = v_3 \to (S \circ f)(v_3) = 0$

$\operatorname{Im}(S \circ f) \to$
$v_4 \to f(v_4) = 2v_4 \to (S \circ f)(v_4) = e_1$